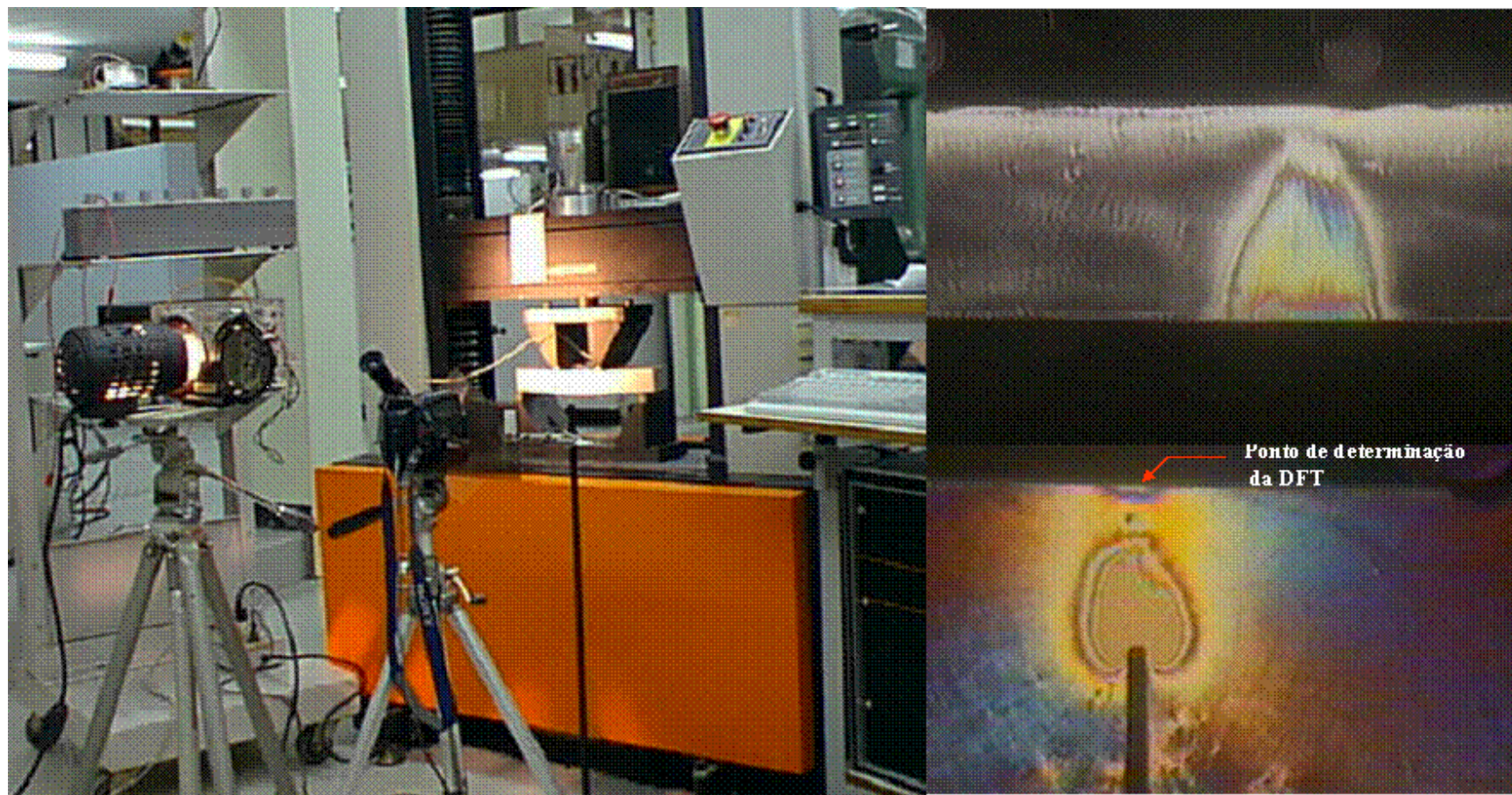


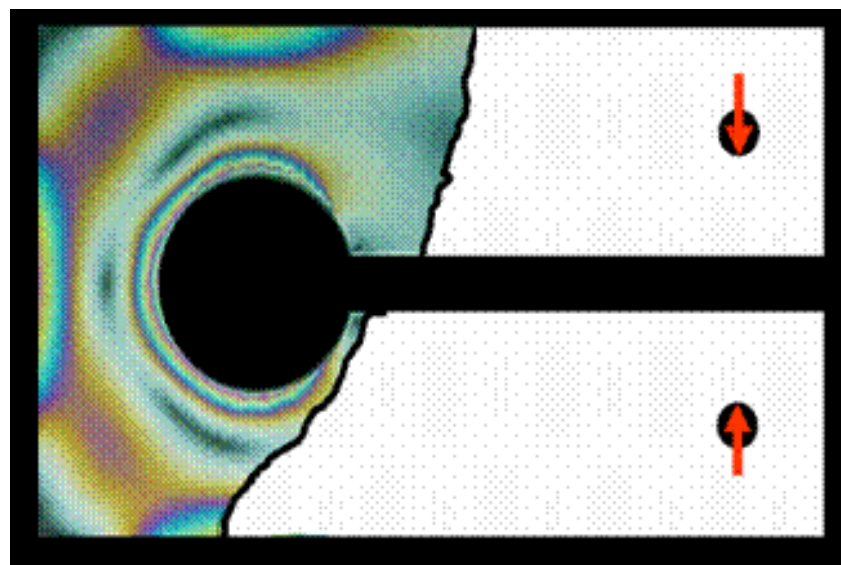
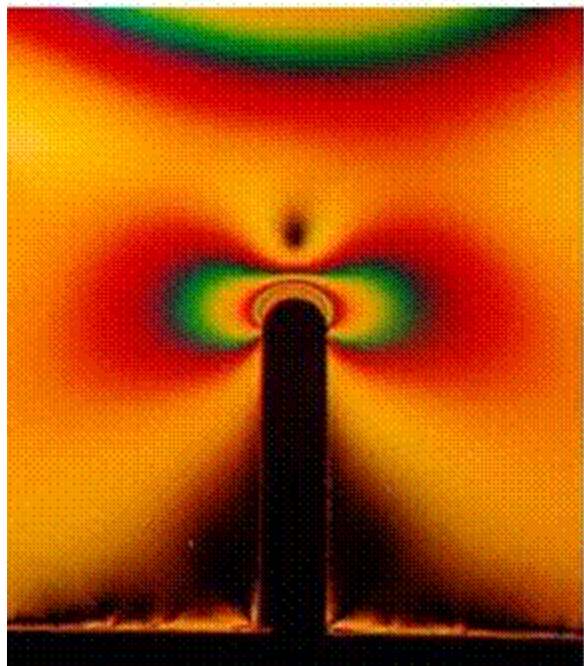
Fotoelasticidade



1 - Introdução

- É uma técnica experimental que utiliza modelos de materiais transparentes (polímeros, vidro, semi condutores, etc) ao tipo de luz empregada (branca, amarela, infra-vermelho, monocromática) e que apresentam anisotropia ótica ou birrefringência (diferentes índices de refração nos diversos planos que passam por um ponto do modelo) quando deformados e são observados através de luz polarizada plana ou circular num instrumento chamado de polariscópio.
- É muito utilizada no Laboratório (geralmente método de transmissão) e no campo (geralmente método de reflexão).
- É uma técnica de campo global, que fornece indicações dos pontos mais sobrecarregados, valores de tensões cisalhantes máximas, direções principais e pode ser aplicada em problemas 2D e 3D estáticos.
- Existem extensões de aplicação denominadas fotoplasticidade, fotoelasticidade dinâmica, etc.

- A fotoelasticidade é utilizada para a:
 - Determinação precisa de fatores de concentração de tensões em problemas biaxiais e triaxiais.
 - Determinação quantitativa ou qualitativa de distribuições de tensões em componentes, localizando seus pontos mais solicitados, sua tensão cisalhante máxima (no plano) e suas direções principais.
 - Determinação de tensões residuais em protótipos poliméricos ou de vidro para inspeção e controle de produção (CDs, lâmpadas, parabrisas,...).



A resposta fotoelástica consiste de duas famílias de franjas que são observadas no modelo ou protótipo:

Franjas isocromáticas: lugares geométricos dos pontos que possuem as mesmas diferenças de tensões principais. A relação entre a diferença das tensões principais no ponto em observação e a chamada ordem de franja isocromática é dada pela expressão de Brewster:

$$\sigma_I - \sigma_{II} = \frac{N}{t} f_{\sigma}$$

onde:

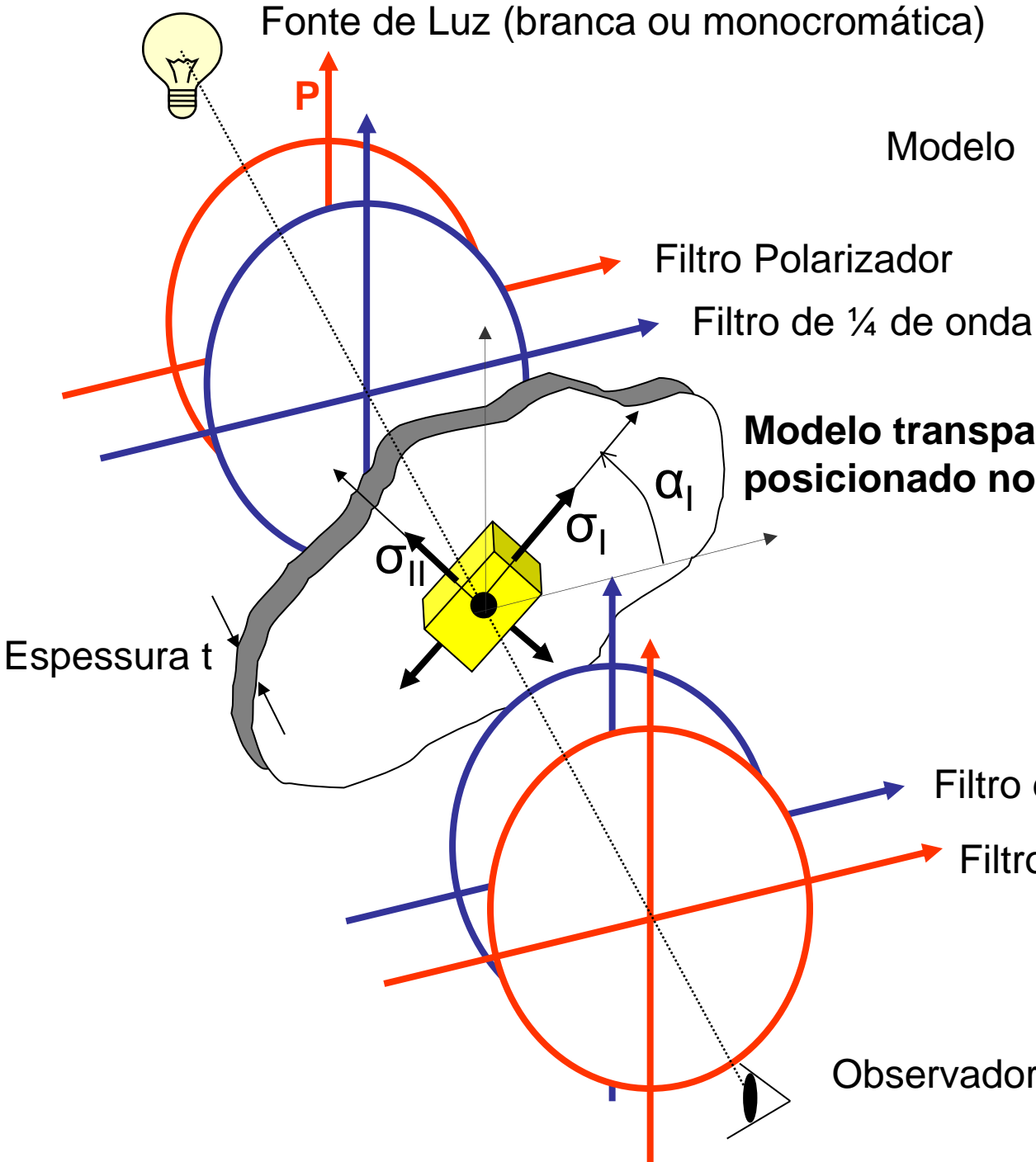
N = ordem de franja isocromática medida no ponto que está sendo observado.

t = espessura do modelo.

f_{σ} = calibração ótica do material fotoelástico para o tipo de luz usado.

Franjas isoclínicas: lugares geométricos dos pontos cujas direções principais fazem ângulos iguais a 0° ou 90° com os eixos do polariscópio.

Polariscópio: é o instrumento básico da fotoelasticidade. Geralmente utiliza luz plana ou circular.



Fonte de Luz (branca ou monocromática)

P

Modelo

Filtro Polarizador

Filtro de 1/4 de onda

Modelo transparente carregado
posicionado no polariscópio

Esessura t

σ_I

σ_{II}

α_I

Filtro de 1/4 de onda

Filtro Analisador

Observador

$$\sigma_I - \sigma_{II} = \frac{N}{t} f_{\sigma}$$

2 - Luz e Polarizadores

A teoria eletromagnética de propagação da luz explica o efeito fotoelástico. A equação de onda está dada abaixo. Sua solução é o espaço de funções harmônicas que podem se resumir a uma soma de senos e cossenos. Se luz branca for utilizada, todos os comprimentos do espectro visível serão importantes. Se luz monocromática for usada, apenas o seu comprimento de onda será importante. A resposta fotoelástica é estudada a partir do que ocorre com um comprimento de onda apenas e depois, se necessário, a superposição de soluções com outros comprimentos de onda é feita.

Equação de onda:

$$\nabla^2 E = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

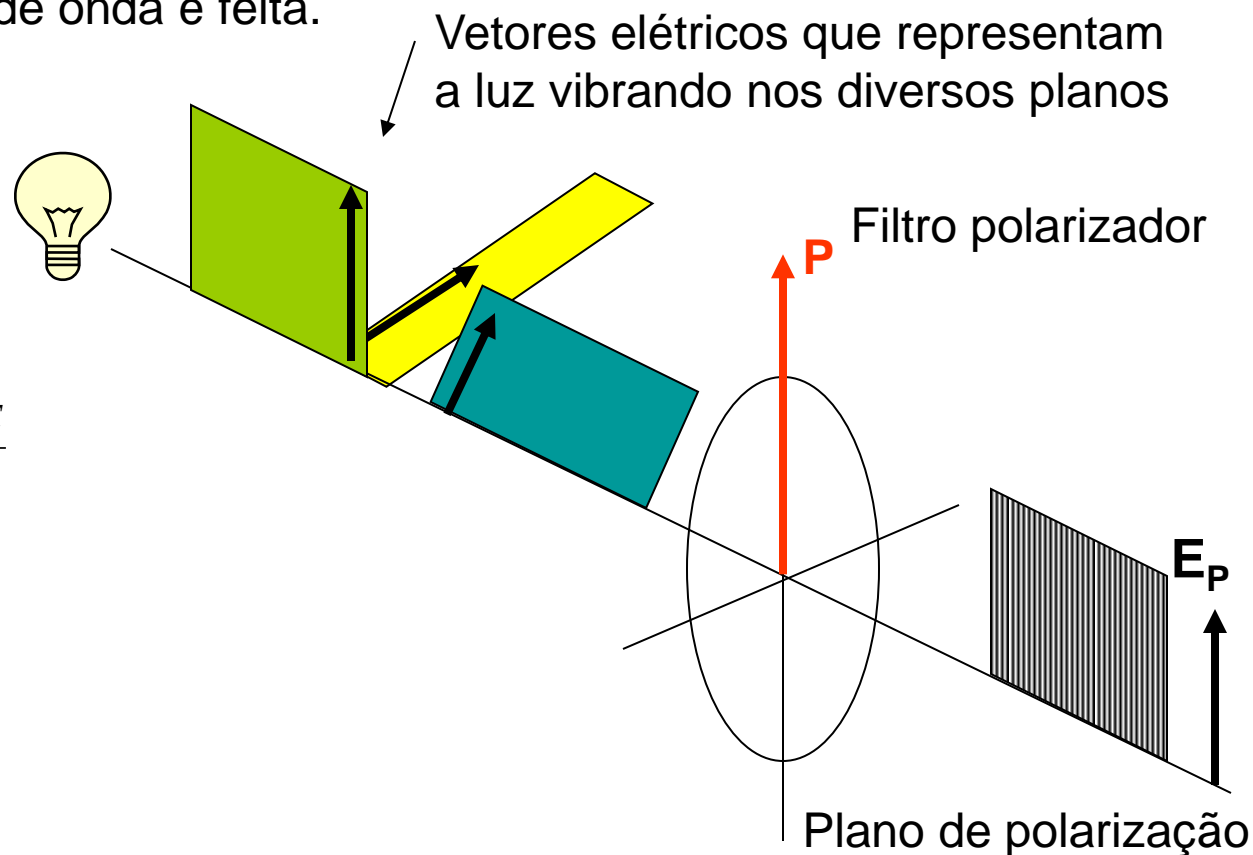
$$\text{unidirecional} \rightarrow \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$E = E_0 \cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = 2\pi f$$

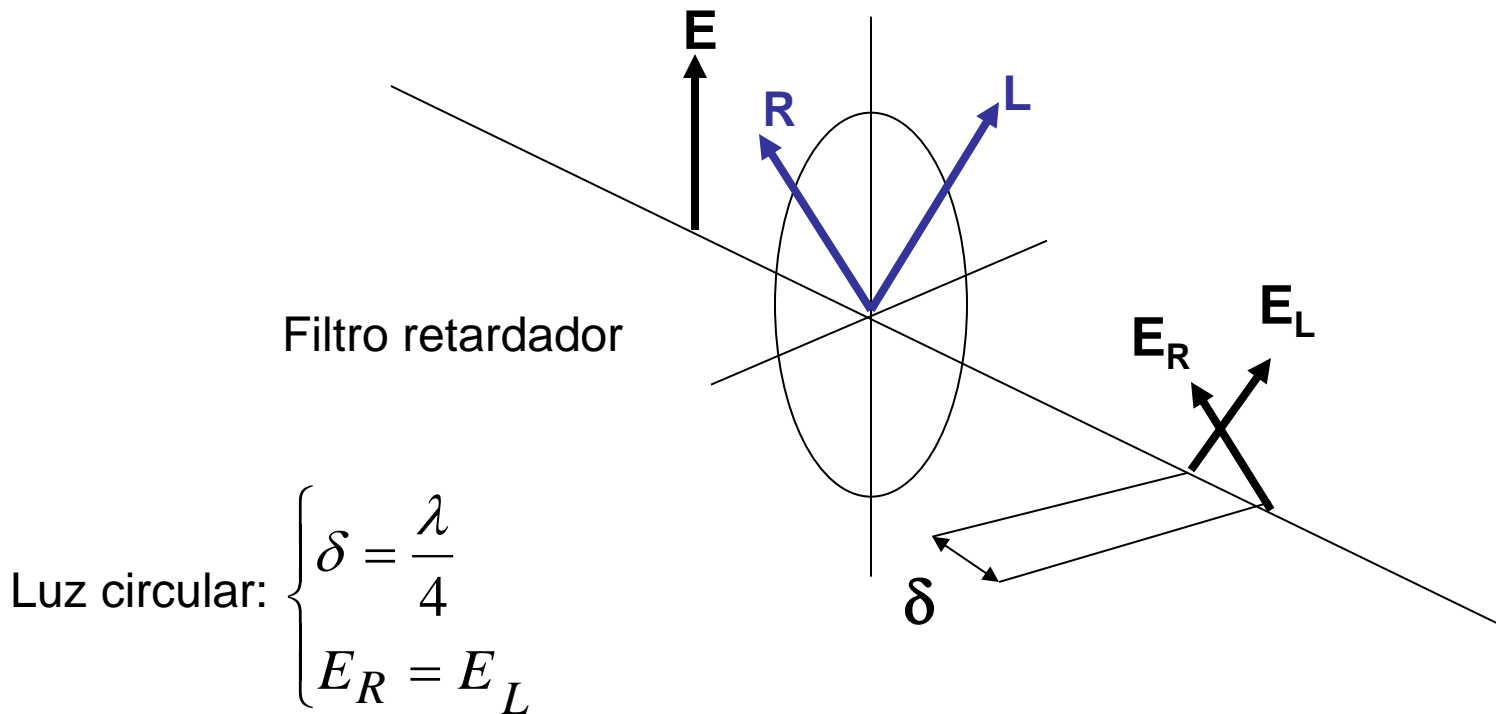
$$T = \frac{1}{f}$$

$$\lambda = T \cdot c$$



3 - Retardador de Ondas

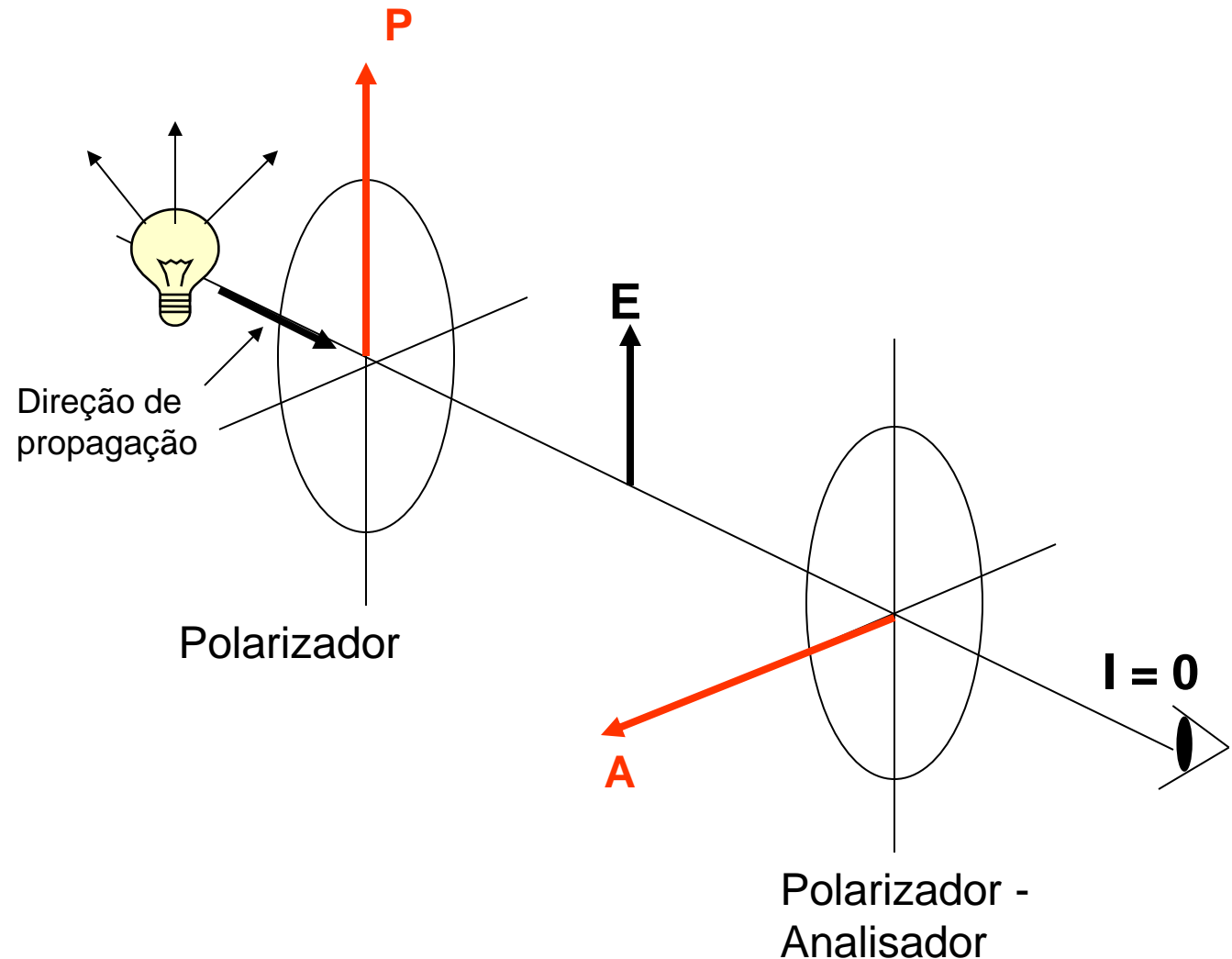
Provoca um atraso entre o vetor elétrico que passa paralelo ao seu eixo lento (L) e o vetor que passa paralelo ao seu eixo rápido. A luz polarizada plana, que entra no retardador, sai elíptica ou circular. Ela será circular se o atraso for de $\frac{1}{4}$ do comprimento de onda e se $E_R = E_L$.



Luz plana: $\rightarrow \delta = 0$

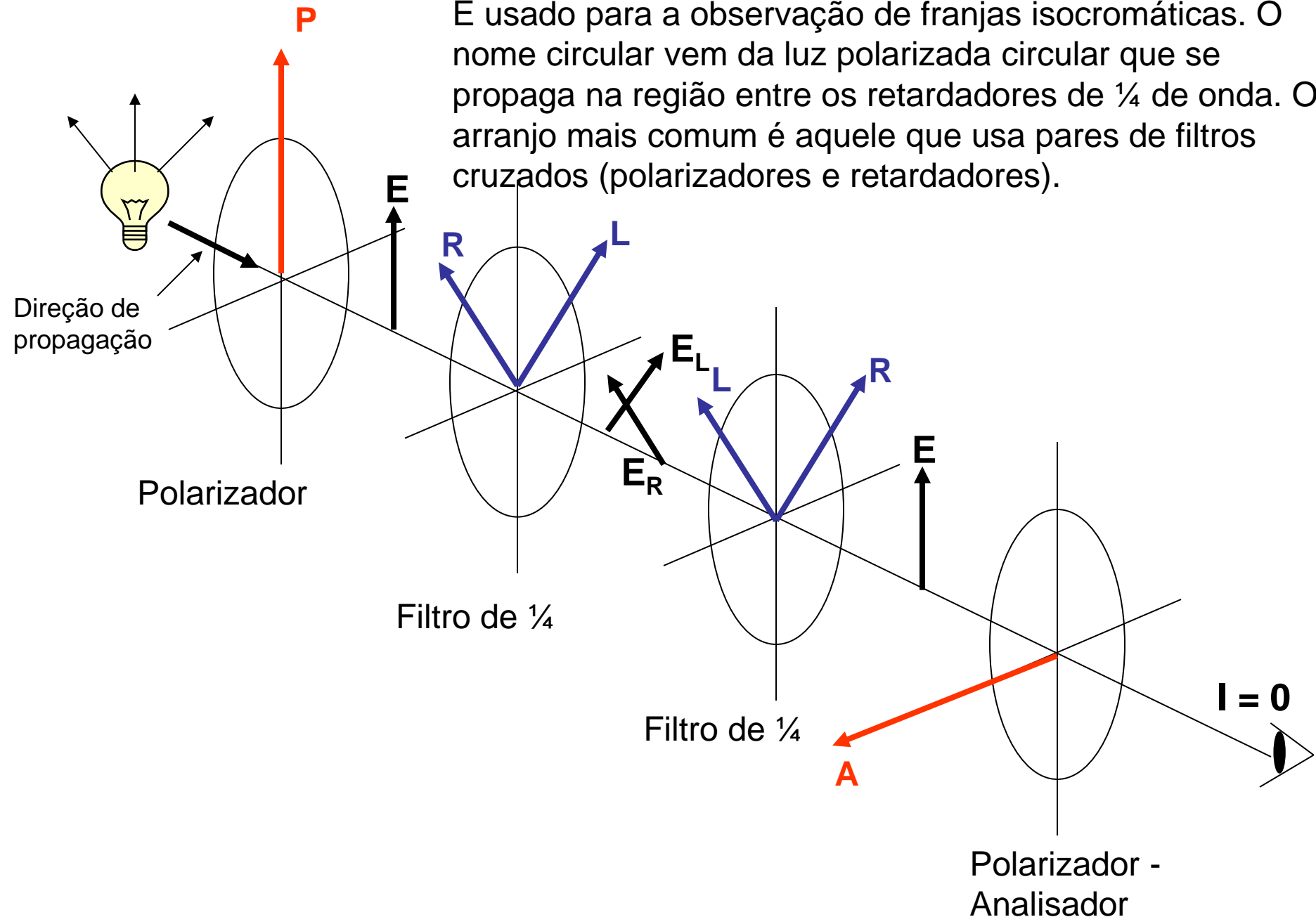
4 - Polariscópio Plano

Consiste de uma fonte de luz e de dois filtros polarizadores que geralmente estão cruzados. É usado para a observação simultânea de franjas isoclínicas e isocromáticas. O nome plano vem da luz polarizada plana que se propaga na região entre os filtros polarizadores.



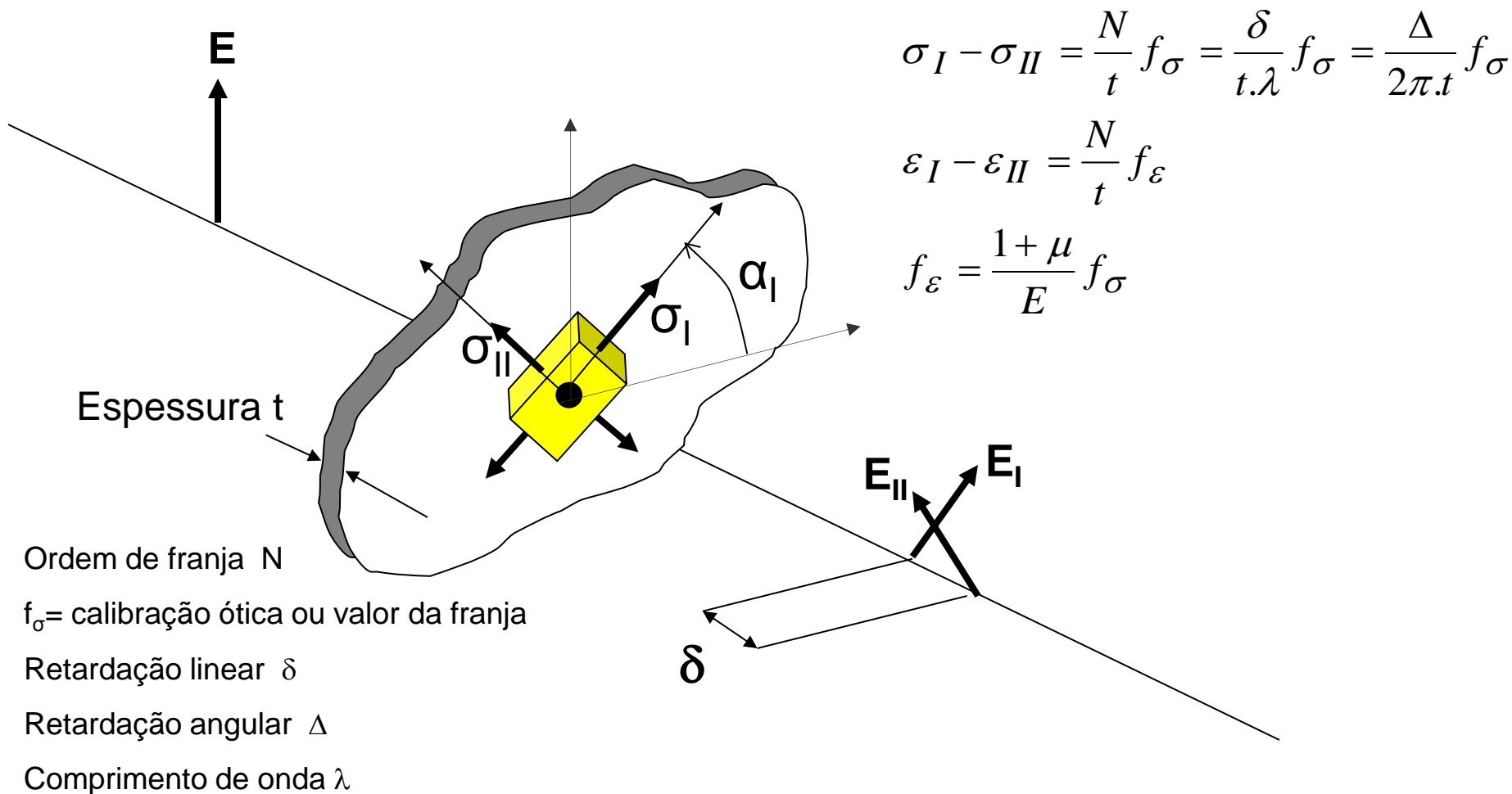
5 - Polariscópio Circular

É usado para a observação de franjas isocromáticas. O nome circular vem da luz polarizada circular que se propaga na região entre os retardadores de $\frac{1}{4}$ de onda. O arranjo mais comum é aquele que usa pares de filtros cruzados (polarizadores e retardadores).



6 - Modelo de Material Birrefringente

Os materiais fotoelásticos são chamados de birrefringentes. Eles apresentam diferentes índices de refração segundo os planos das tensões principais. Assim, estes materiais trabalham como retardadores de ondas, a retardação dependendo do material, do tipo de luz utilizada e da diferença entre as tensões principais.



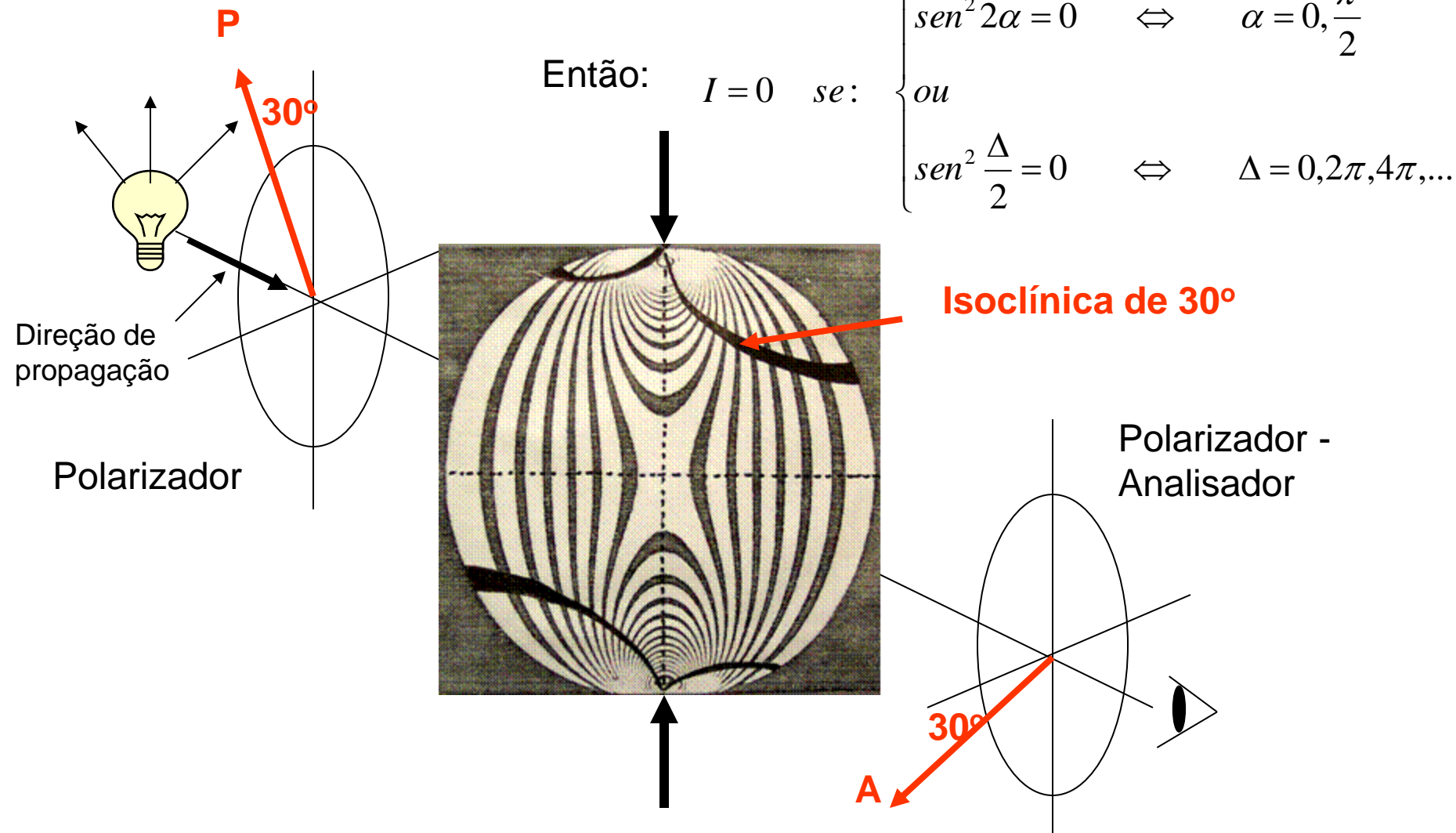
7 - Modelo no Polariscópio Plano

A intensidade de luz, I , observada para cada ponto de um modelo de material birrefringente é proporcional ao quadrado da amplitude do vetor elétrico que atravessa o analisador e é dada por:

$$I \propto E_a^2 \propto E_o^2 \cdot \text{sen}^2 2\alpha \cdot \text{sen}^2 \frac{\Delta}{2}$$

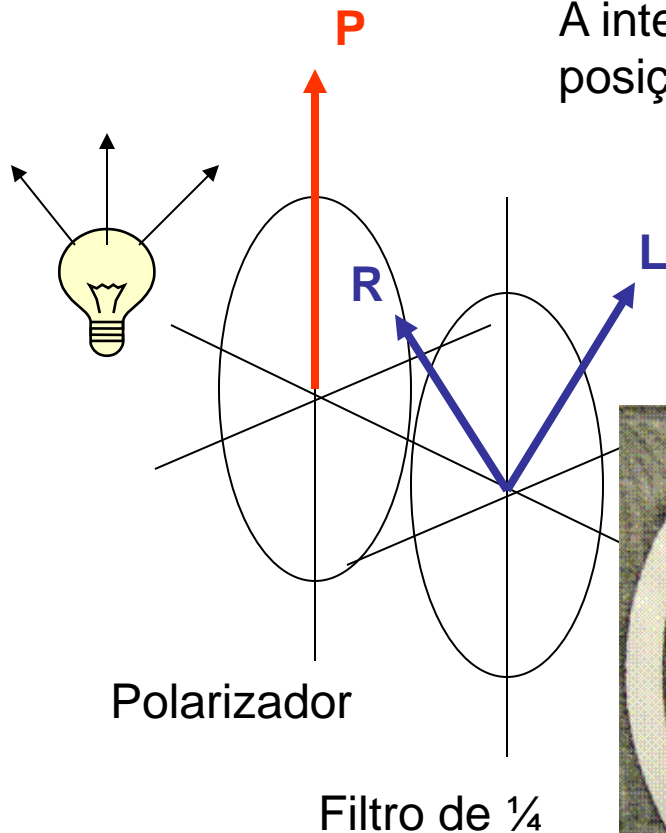
Então: $I = 0$ se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sen}^2 2\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0, \frac{\pi}{2} \\ \text{ou} \\ \text{sen}^2 \frac{\Delta}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta = 0, 2\pi, 4\pi, \dots \end{array} \right.$$



8 - Modelo no Polariscópio Circular

A intensidade de luz independe das direções principais. Na posição de polariscópio cruzado tem-se:



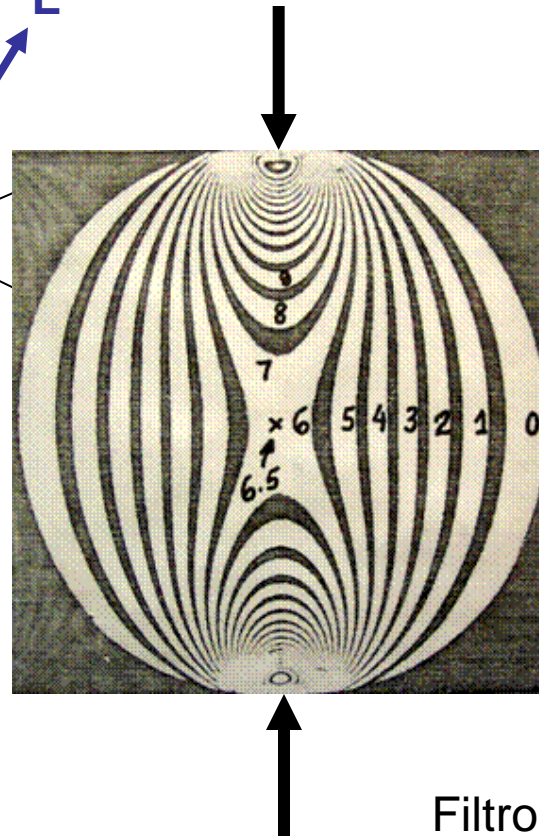
$$N = \frac{\Delta}{2\pi} = 0,1,2,3,\dots$$

$$N = \frac{\delta}{\lambda} = 0,1,2,3,\dots$$

Δ = *retardação angular*

δ = *retardação linear*

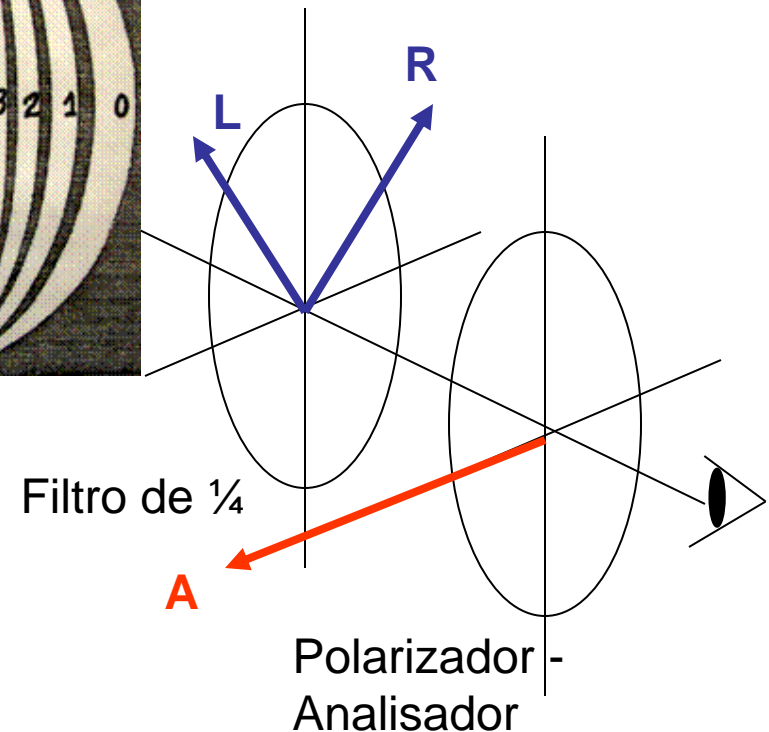
N = *ordem de franja isocromática*



$$I \propto E_0^2 \propto \sin^2 \frac{\Delta}{2}$$

$$I = 0 \quad \text{se:} \quad \sin^2 \frac{\Delta}{2} = 0$$

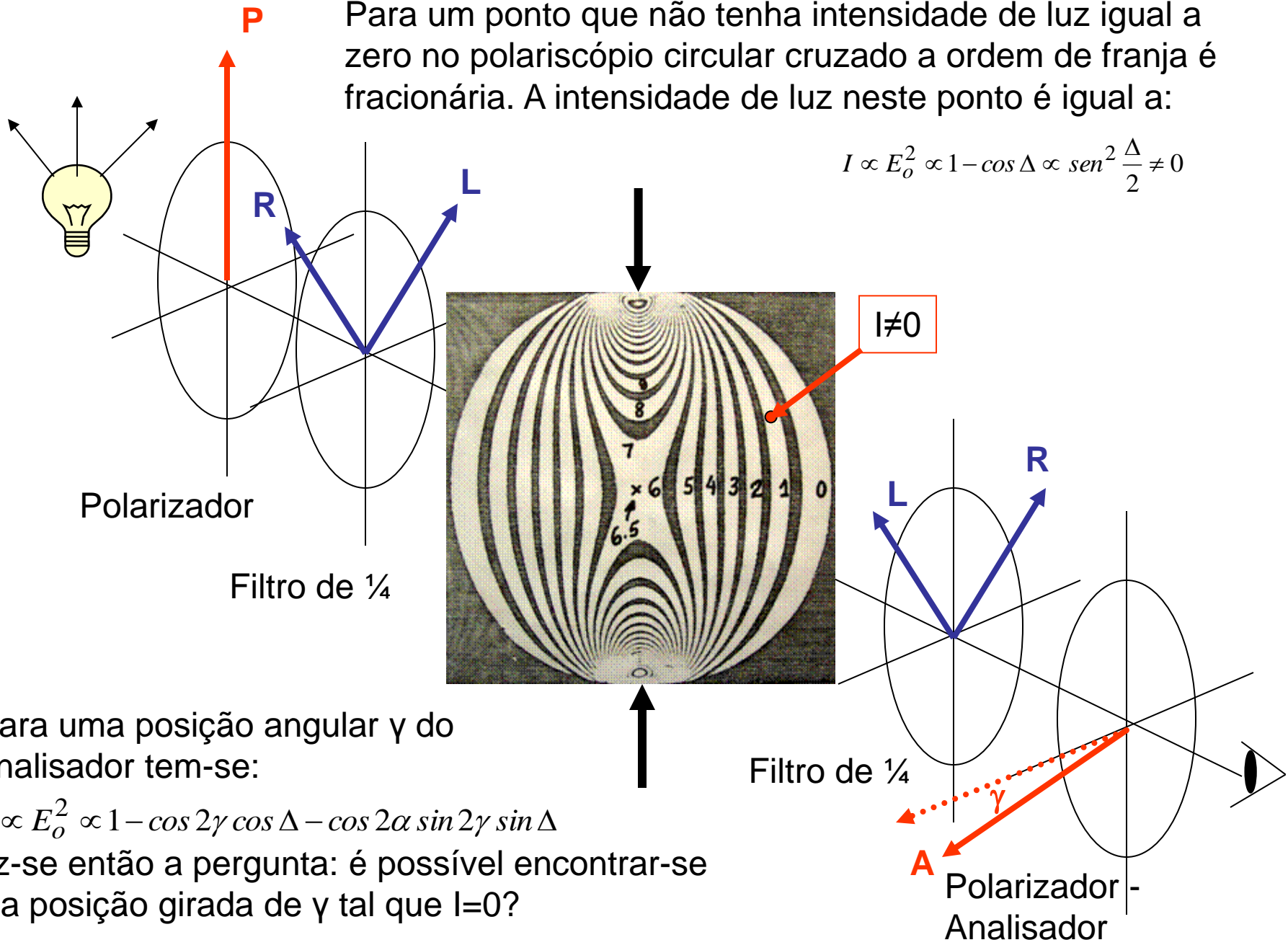
$$\Leftrightarrow \Delta = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$$



9 – Medição da Ordem de Franja Fracionária

Para um ponto que não tenha intensidade de luz igual a zero no polariscópio circular cruzado a ordem de franja é fracionária. A intensidade de luz neste ponto é igual a:

$$I \propto E_o^2 \propto 1 - \cos \Delta \propto \text{sen}^2 \frac{\Delta}{2} \neq 0$$



Para uma posição angular γ do analisador tem-se:

$$I \propto E_o^2 \propto 1 - \cos 2\gamma \cos \Delta - \cos 2\alpha \sin 2\gamma \sin \Delta$$

Faz-se então a pergunta: é possível encontrar-se uma posição girada de γ tal que $I=0$?

Para um dado ângulo de rotação γ do analisador, os valores de α e Δ requeridos para a intensidade passar por um máximo ou mínimo é dado por:

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} \propto 2 \sin 2\alpha \sin 2\gamma \sin \Delta = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial \Delta} \propto \cos 2\gamma \sin \Delta - \cos 2\alpha \sin 2\gamma \cos \Delta = 0$$

Os valores de α e Δ que satisfazem as condições acima para um mínimo de I são:

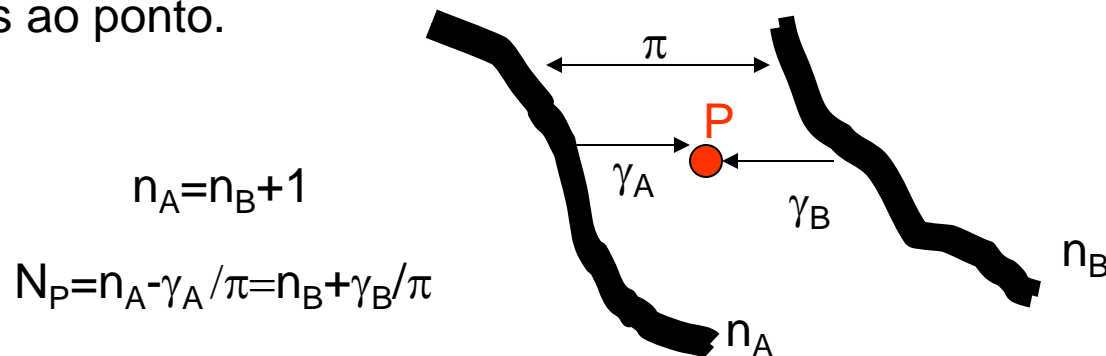
$$\alpha = \frac{n\pi}{2} \quad e \quad \Delta = 2n\pi \pm 2\gamma$$

Estas condições levam a $I=0$ no ponto e a ordem de franja nesta situação do polariscópio será dada por:

$$\alpha = \frac{n\pi}{2} \quad e \quad N = \frac{2n\pi \pm 2\gamma}{2\pi} = n \pm \frac{\gamma}{\pi}$$

O procedimento seguido para a medição da ordem de franja fracionária é chamado de Método de Tardy:

- 1 – Selecionar o ponto a ser medido.
- 2 – Montar o polariscópio plano e girá-lo de modo a passar uma isoclínica α pelo ponto, isto é, fazendo $l=0$ no ponto.
- 3 – Sem mudar o polariscópio de posição, trocá-lo de plano para circular inserindo dois filtros atrasadores de onda de $\frac{1}{4}$ nas posições corretas. A isoclínica sobre o ponto irá desaparecer e então l será diferente de zero.
- 4 – Girar o analisador de um ângulo γ tal que a intensidade de luz no ponto se anule.
- 5 – Determinar a ordem de franja no ponto, subtraindo ou somando γ/π de n_A ou n_B respectivamente, isto é se $n_A = n_B + 1$, ou seja, dependendo se a franja que caminhou no sentido do ponto para a zeragem da sua intensidade de luz era uma franja de maior ou menor valor entre as adjacentes ao ponto.



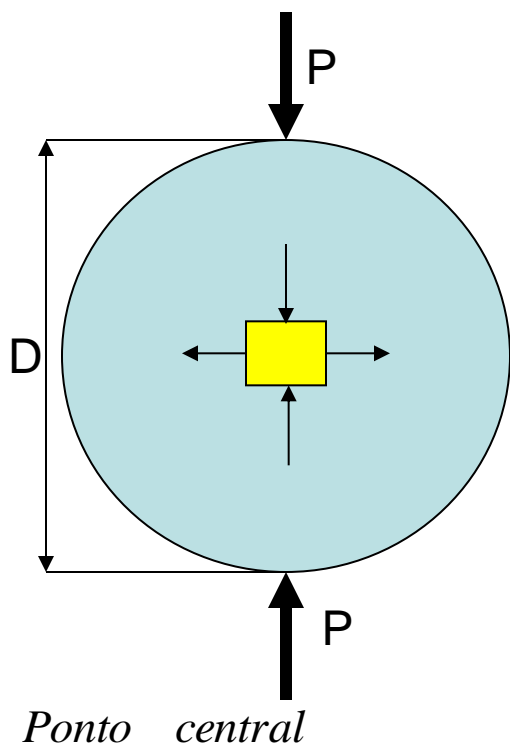
10 – Cores na Fotoelasticidade

Quando luz monocromática (apena um comprimento de onda) é utilizada, as intensidades de luz nos pontos de um modelo variam de pontos totalmente claros a totalmente escuros, entre estes havendo uma graduação de cinzas. Quando luz branca (todos os comprimentos de ondas) é utilizada, a anulação da intensidade de luz para um comprimento de onda específico retira este comprimento do espectro observado, mas os outros comprimentos contribuirão para proporcionar luz que então será colorida. A Tabela abaixo mostra as cores observadas nos pontos de um modelo quando alguns comprimentos específicos são anulados.

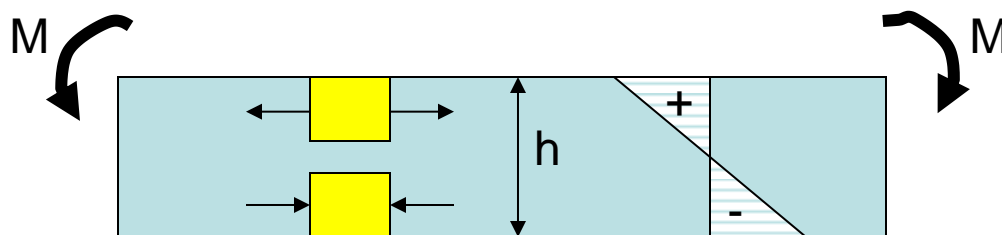
Cor resultante	Retardação linear, δ (nm)	Ordem de franja, N
Preto	0	0
Cinza	160	0,28
Branco	260	0,45
Amarelo	345	0,60
Laranja	460	0,80
Vermelho	520	0,90
Roxo	575	1,00
Azul	620	1,08
Laranja	935	1,63
Rosa	1035	1,82
Violeta	1150	2,00
verde	1350	2,35

11 – Calibração dos Materiais Fotoelásticos

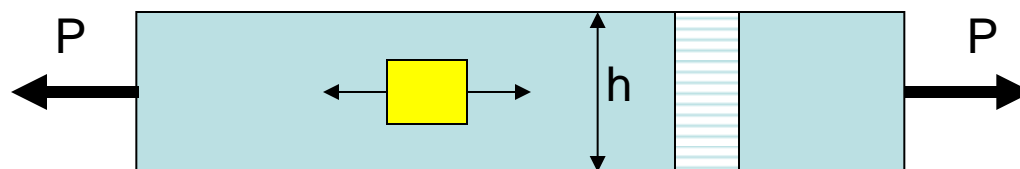
A calibração dos materiais fotoelásticos é bastante simples e apenas requer o conhecimento do estado de tensão para algum ponto do modelo a ser estudado. O valor da franja f_σ para o material depende do comprimento de luz usado, enquanto que o valor K é apenas dependente do material. Geralmente, usam-se os seguintes modelos para calibração: disco sob compressão diametral, barra de seção retangular em flexão ou sob tração.



$$f_\sigma = \frac{8P}{\pi DN}$$



$$f_\sigma = \frac{6M}{h^2 N}$$



$$f_\sigma = \frac{P}{hN}$$

$$K = \lambda \cdot f_\sigma$$

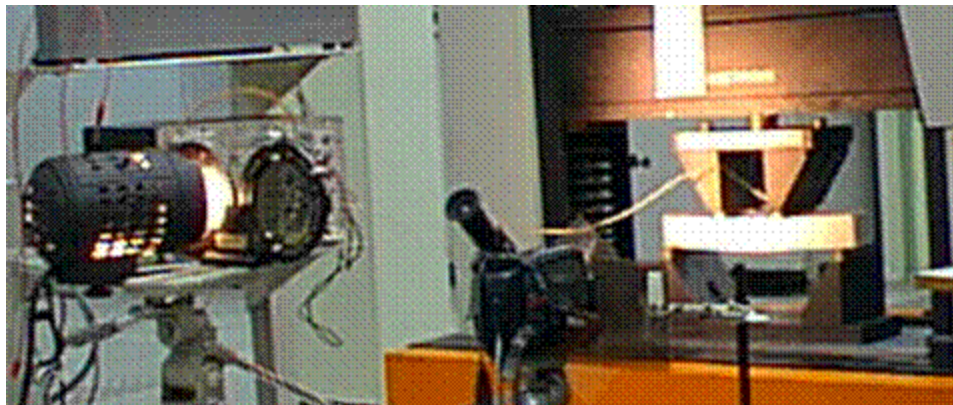
12 – Fotoelasticidade por Reflexão

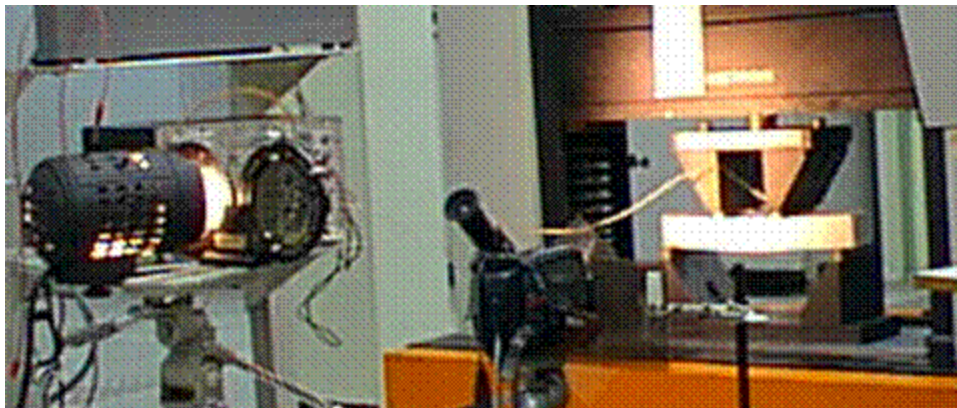
O método, também chamado de método da camada birrefringente, é uma extensão da fotoelasticidade tradicional. Ele utiliza uma camada fina de material fotoelástico colada à superfície (tornada refletora) do protótipo.

Sua principal vantagem é a facilidade de emprego utilizando protótipos em situações reais de carregamento. É muito usado para a localização de regiões sobrecarregadas, para a determinação das tensões cisalhantes máximas (atuantes em planos normais à superfície de observação) e direções principais. O método tem uma exatidão razoável para as necessidades comuns da engenharia e muitas vezes é utilizado como uma técnica preliminar para a seleção de pontos críticos onde EREs serão instalados.

Fatores a serem considerados que influenciarão a correção de uma análise de tensões realizada com auxílio da fotoelasticidade por reflexão:

- Sensibilidade, resolução e exatidão.
- Efeito de reforço provocado pela camada.
- Variação da deformação ao longo da espessura da camada.
- Diferença entre os coeficientes de Poisson da camada e protótipo.





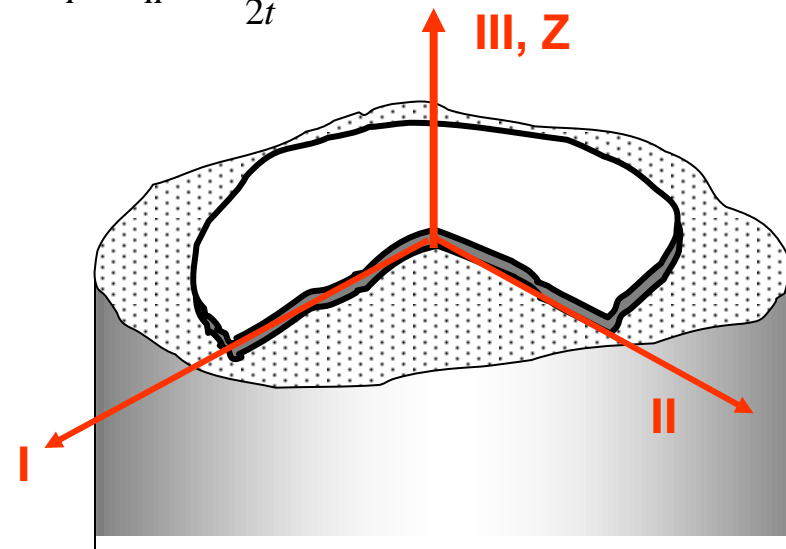
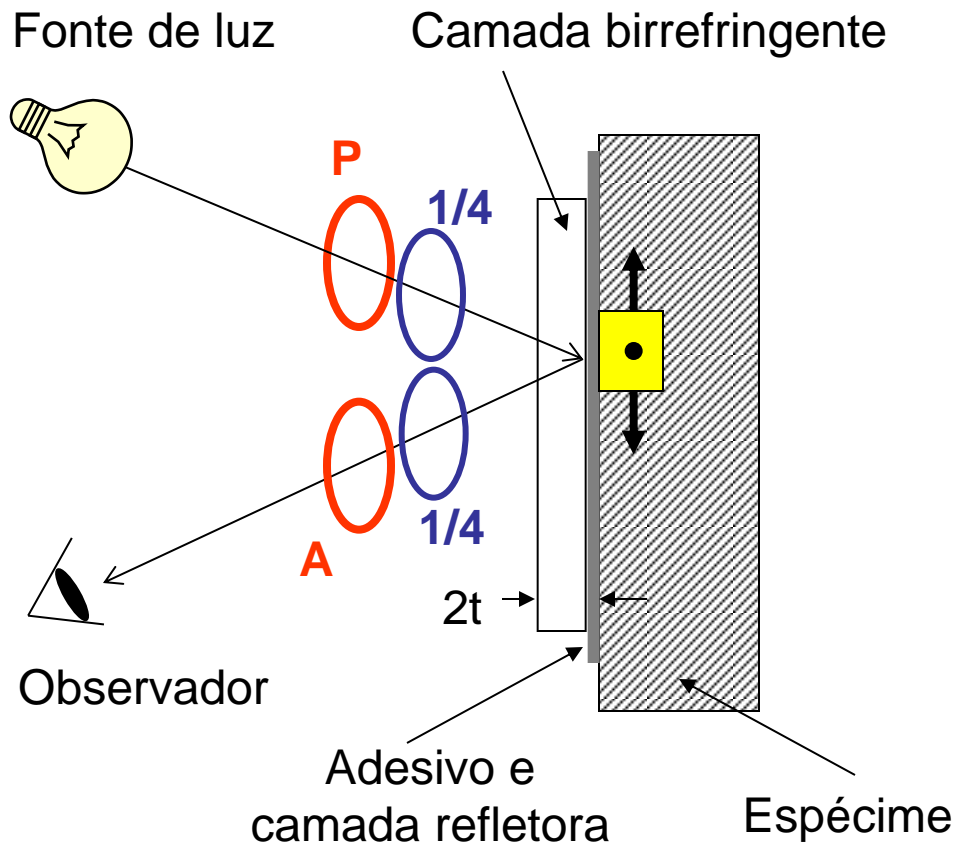
$$\text{Hipótese} \rightarrow \begin{cases} \sigma_z = 0 \\ \varepsilon_I^c = \varepsilon_I^s \\ \varepsilon_{II}^c = \varepsilon_{II}^s \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{E^s} (\sigma_I^s - \mu^s \sigma_{II}^s) = \frac{1}{E^c} (\sigma_I^c - \mu^c \sigma_{II}^c) \\ \frac{1}{E^s} (\sigma_{II}^s - \mu^s \sigma_I^s) = \frac{1}{E^c} (\sigma_{II}^c - \mu^c \sigma_I^c) \end{cases}$$

$$\sigma_I^s - \sigma_{II}^s = \frac{E^s}{E^c} \frac{1 + \mu^c}{1 + \mu^s} (\sigma_I^c - \sigma_{II}^c) = \frac{E^s}{E^c} \frac{1 + \mu^c}{1 + \mu^s} \frac{N \cdot f \cdot \sigma}{2t}$$

ou

$$\varepsilon_I^s - \varepsilon_{II}^s = \frac{N \cdot f \cdot \varepsilon}{2t}$$



13 – Leis de Semelhança

As relações entre tensões ou deformações para modelos e protótipos bidimensionais que trabalham dentro do regime linear - elástico e para pequenas distorções de geometria são as seguintes:

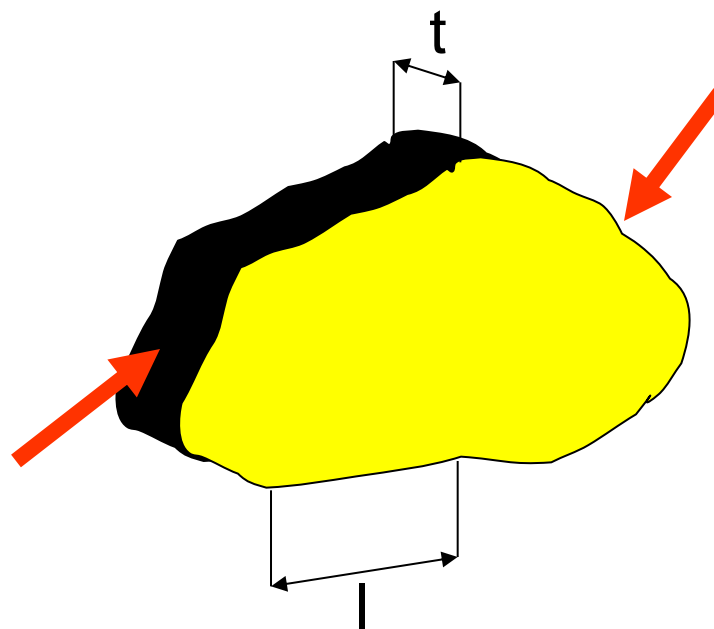
Casos bidimensionais elásticos - estáticos

Equação de predição:

$$\left(\frac{\sigma \cdot l^2}{P} \right)_m = \left(\frac{\sigma \cdot l^2}{P} \right)_p$$

$$\sigma_p = \sigma_m \cdot \frac{P_p}{P_m} \cdot \left(\frac{l_m}{l_p} \right)^2$$

$$\sigma_p = \sigma_m \cdot \frac{P_p}{P_m} \cdot \frac{l_m}{l_p} \cdot \frac{t_m}{t_p}$$



14 – Separação de Tensões

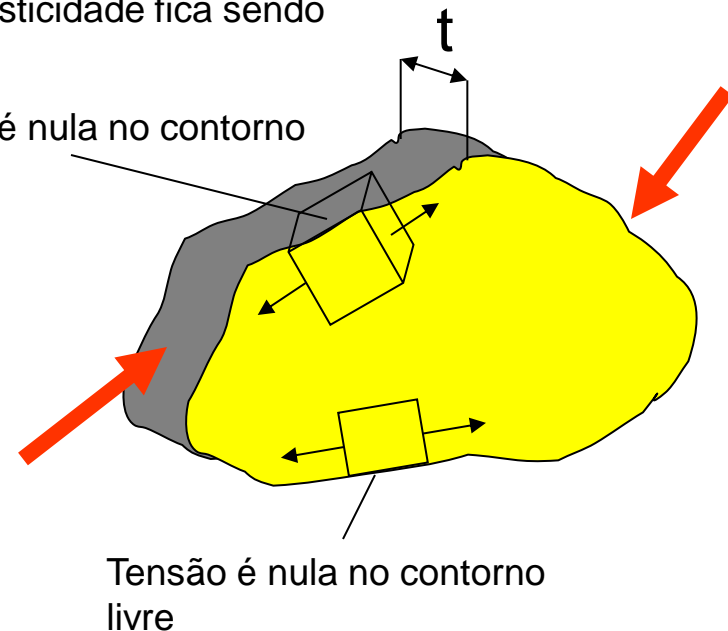
Como a definição do estado de tensão 2-D exige o conhecimento de três informações independentes, os dois parâmetros medidos no polaricópio, diferença de tensões principais e direções principais, não são suficientes e então surge a necessidade de obter-se uma terceira informação. Geralmente, as tensões máximas ocorrem em pontos dos contornos dos componentes e estes pontos englobam as superfícies livres, onde as tensões aplicadas são nulas. Sendo assim, para estes pontos já se tem a informação que uma das tensões principais (normal ao contorno) é nula e a equação básica da fotoelasticidade fica sendo

$$\sigma_I \text{ ou } II = \frac{N \cdot f \sigma}{t}, \quad \sigma_{II} \text{ ou } I = 0$$

Tensão é nula no contorno livre

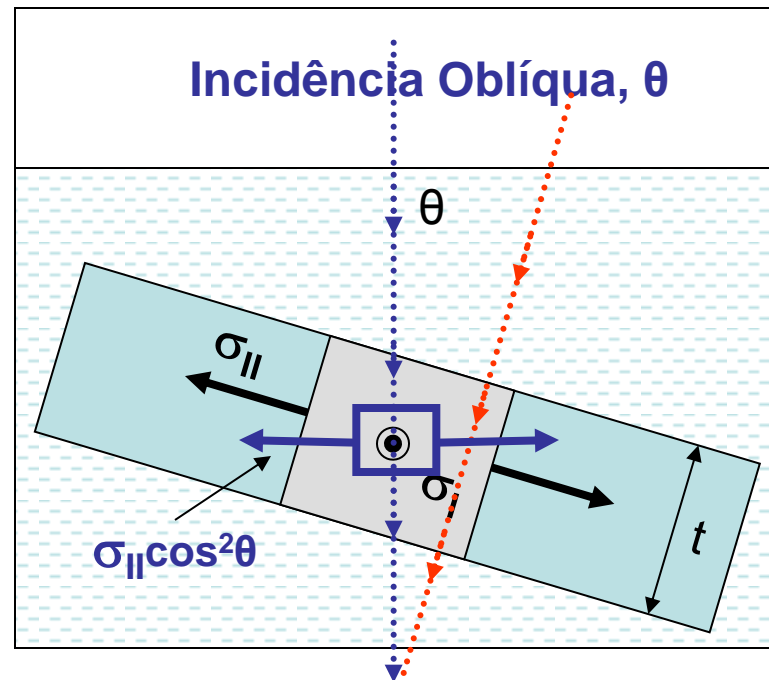
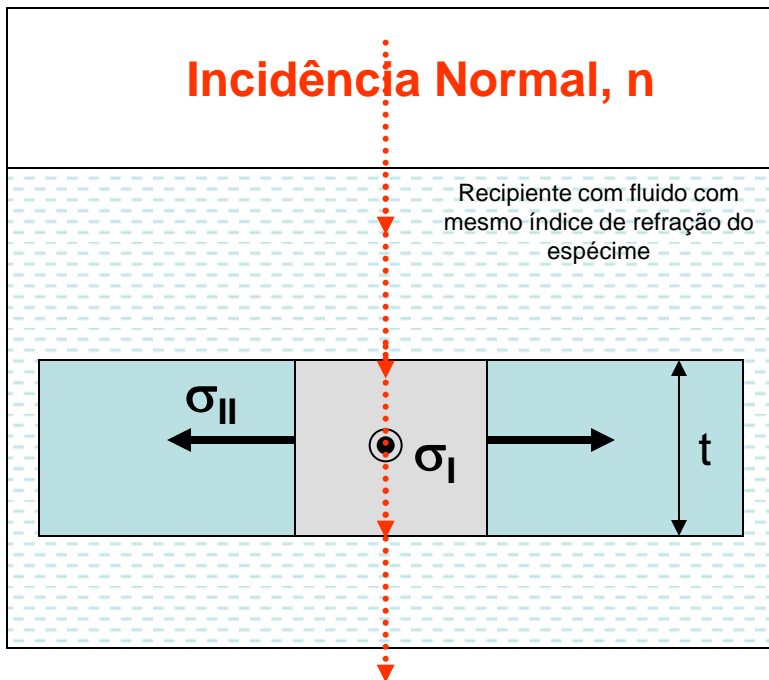
Nos caso onde a terceira informação torna-se inviável de ser obtida por uma análise rápida do problema deve-se utilizar um método de separação de tensões. Esta denominação vem do fato que se deseja conhecer as tensões σ_I e σ_{II} separadamente e não apenas a sua diferença $\sigma_I - \sigma_{II}$. Os métodos de separação mais usuais são os seguintes:

- Métodos das diferenças de cisalhamento (shear difference) de Frocht e de Filon (baseados nas equações de equilíbrio).
- Pontos de influência, analogia elétrica e de Dally (baseados nas equações de compatibilidade).
- Extensômetros laterais e extensometria.
- Incidência oblíqua



Incidência Oblíqua

É um método estritamente fotoelástico, exigindo apenas duas ou três leituras de ordens de franjas no mesmo ponto, com incidências normal e oblíqua ao plano de observação do espécime. No caso que se segue, apenas duas leituras de N são necessárias: uma com incidência normal, N_n , outra com incidência oblíqua, N_θ . Neste caso realiza-se a rotação de θ graus em torno do eixo definido como I.



$$\sigma_I - \sigma_{II} = \frac{N_n}{t} f_\sigma$$

$$\sigma_I - \sigma_{II} \cdot \cos^2 \theta = \frac{N_\theta}{t \cdot \frac{1}{\cos \theta}} f_\sigma$$

$$\begin{cases} \sigma_I = f_\sigma \frac{1}{t \sin^2 \theta} (N_\theta - N_n \cos \theta) \\ \sigma_{II} = f_\sigma \frac{1}{t \sin^2 \theta} (N_\theta \cos \theta - N_n) \end{cases}$$

15 – Materiais Fotoelásticos

Um dos fatores mais importantes numa análise fotoelástica é a disponibilidade do material apropriado para a confecção do modelo. Infelizmente não existe um material ideal e todos os materiais existentes apresentam vantagens e desvantagens.

Principais propriedades dos materiais fotoelásticos

- Transparência
- Alta sensibilidade (baixo f_{σ}).
- Propriedades lineares e elásticas.
- Isotropia e homogeneidade.
- Baixo creep.
- Alto módulo de elasticidade.
- Número de mérito alto: $Q = E / f_{\sigma}$
- Ausência de efeito de bordo (baixa influência do tempo e da umidade).
- Baixa influência da temperatura sobre propriedades.
- Usinabilidade.
- Baixo custo.
- Facilidade na aplicação de desmoldantes.
- Fundição de grandes volumes.

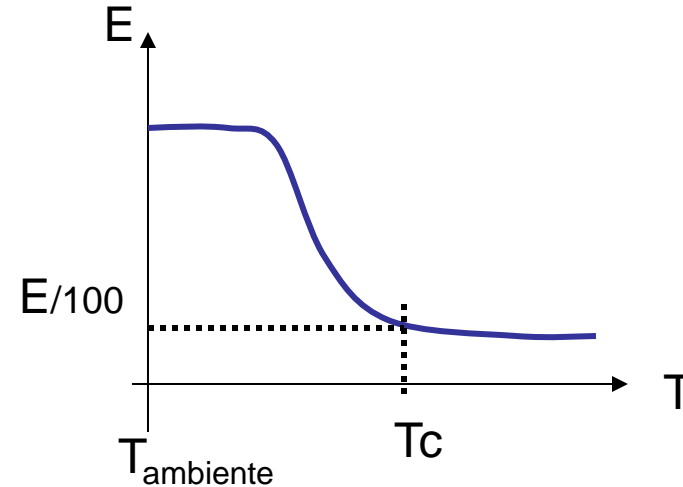
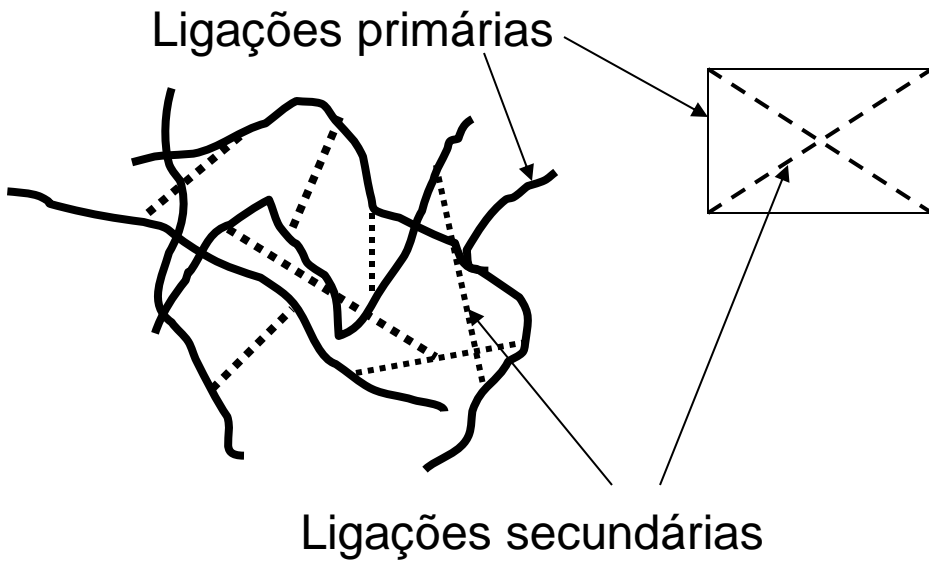
Principais Materiais

- 2-D comerciais: Columbia resin CR-39, Homalite 100, PSM-1
- 2-D: Policarbonato, Poliéster, Poliuretano, Epóxi, Vidros, Gelatinas.
- 3-D: Resinas epóxi.

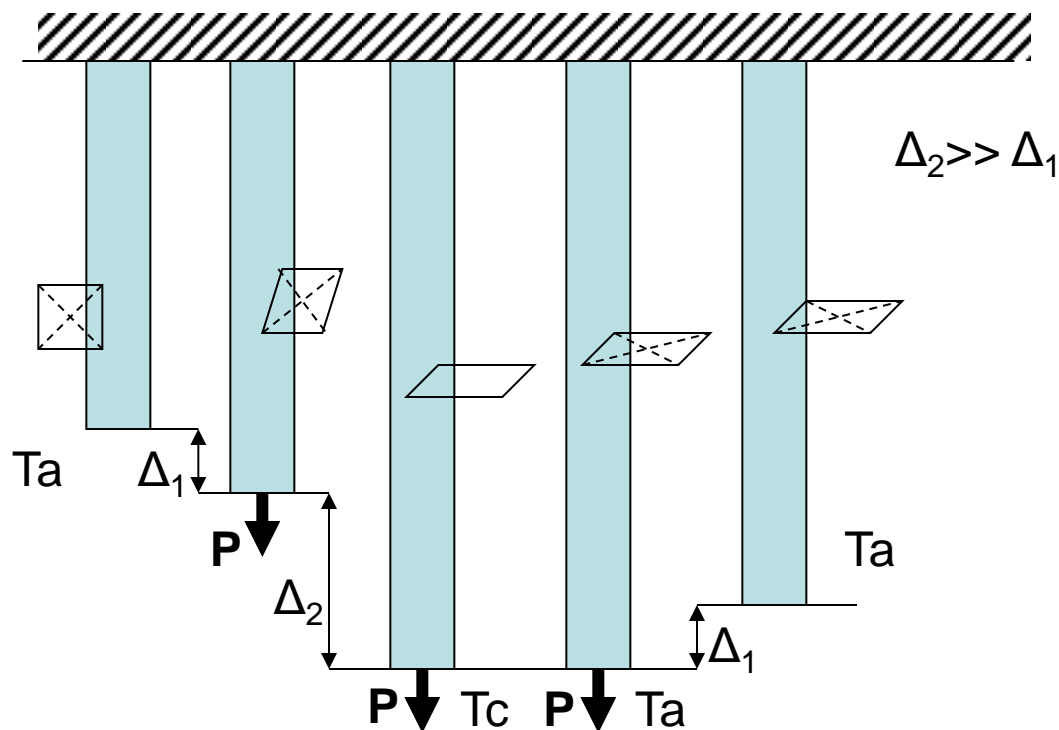
16 – Fotoelasticidade Tridimensional

A fotoelasticidade tridimensional exige técnicas especiais, pois é, praticamente, muito difícil ou impossível analisar-se um modelo tridimensional utilizando-se um polariscópio de transmissão. Esta dificuldade é causada pelo efeito integrado de desvio dos raios luminosos, provocado pelas tensões que variam ao longo da trajetória da luz que passa pelo modelo.

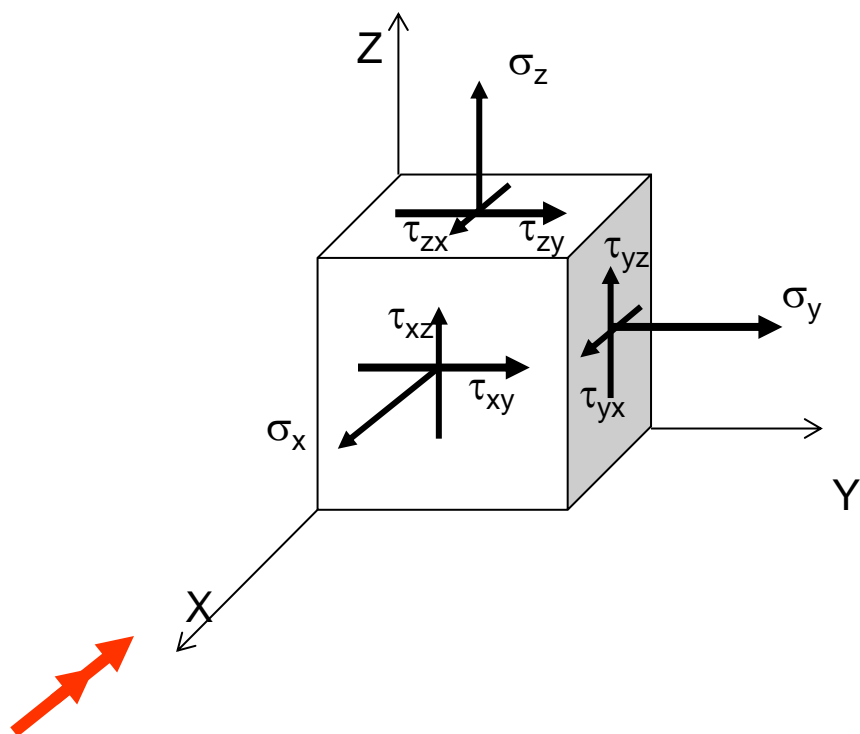
O método de análise 3-D mais utilizado é o de “congelamento de tensões e corte em fatias do modelo” – stress freezing and slice cutting. Este método se baseia no comportamento que alguns polímeros apresentam quando aquecidos. Até uma certa temperatura existem cadeias moleculares primárias e secundárias. Após uma temperatura chamada de crítica, T_c , as cadeias secundárias se desfazem e o módulo de elasticidade do polímero cai de mais de 100 vezes do seu valor à temperatura ambiente. Estas cadeias, porém, reaparecerão após a temperatura ser decrescida e tornar-se menor que T_c .



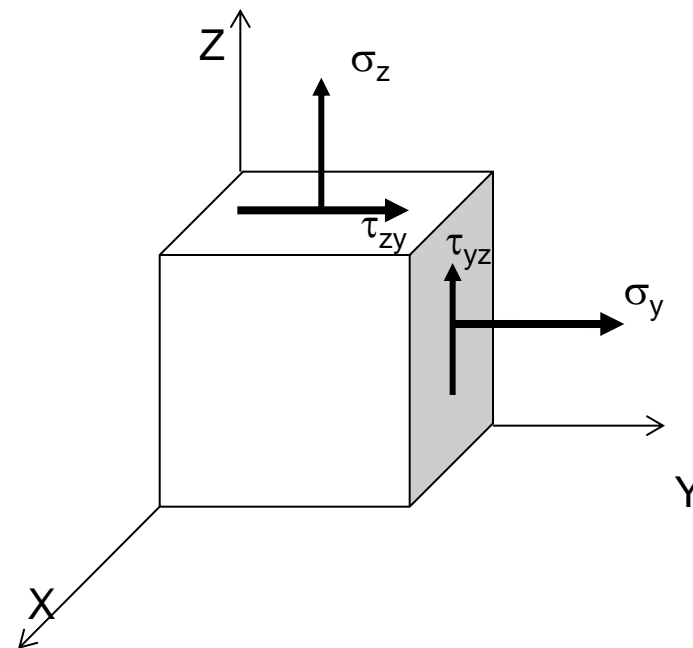
Se o material fotoelástico 3-D for deformado com um pequeno carregamento quando $T > T_c$ e a temperatura for então abaixada lentamente, mantendo-se o carregamento aplicado, as novas cadeias secundárias que surgirem fixarão as deformações que forma feitas nas cadeias primárias. Assim ao alcançar-se a temperatura ambiente, T_a , o carregamento poderá ser retirados com uma perda desprezível da deformação que foi causada quando $T > T_c$. Fatias dos planos que interessarem à análise de tensões poderão então ser removidas por usinagem do modelo e observadas no polariscópio. No corte destas fatias deve-se tomar cuidado para evitar seu aquecimento, o que poderá descongelar as deformações e mesmo introduzir outras devido ao posterior resfriamento brusco do modelo. Geralmente, a usinagem é feita com intensa refrigeração, avanço e profundidade de corte pequenos e velocidade adequada para o material polimérico não aquecer em demasia.



Deve-se atentar que as tensões principais que resultam de uma análise de fatias podem não ser realmente as principais para o ponto 3-D. Neste caso estas tensões resultantes das análises das fatias são chamadas de principais secundárias.



Direção de incidência de luz e observação do modelo



Estado de tensão visualizado pela incidência de luz na direção X. A resposta dada pelas isocromáticas será:

$$(\sigma_I - \sigma_{II})_X = \frac{N_x}{t_x} f_\sigma$$

17 – Bibliografia

1. Durelli, A.J. e Riley W.F., “Introduction to Photomechanics”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1965.
2. Dally, J.W. e Riley, W.F., “Experimental Stress Analysis”, McGraw-Hill, 4ª ed., 2005.
3. Jessop, H.T. E Harris, F.C., “Photoelasticity: Principles and Methods”, Dover Publications, NY, 1950.
4. Kuske, A. E Robertson, G., “Photoelastic Stress Analysis”, John Wiley & Sons, NY, 1974.
5. Frocht, M.M., “Photoelasticity”, John Wiley & Sons, NY, vol.1, 1941, vol.2, 1948.
6. Ramesh, K., “Digital Photoelasticity”, Springer, 2000.

